

Penyelesaian Bentuk Wronskian bagi Persamaan KdV  
dan Benjamin-Ono Dengan Menggunakan Persamaan BKT.

Oleh  
Mukheta bin Isa  
Jabatan Matematik  
Universiti Teknologi Malaysia

Abstrak

Penyelesaian N-soliton bagi persamaan bendalir kedalaman terhingga (BKT) diolah dibawah had tertentu untuk mendapatkan penyelesaian bentuk Wronskian bagi persamaan KdV dan Benjamin-Ono.

1. Pendahuluan

Matsuno[1] telah memperlihatkan bahawa persamaan bendalir kedalaman terhingga (BKT),

$$U_t + 2UU_x + G[U_{xx}] = 0 \quad (1.0)$$

dengan

$$G[f(x)] = \frac{\lambda}{2} P \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \coth \frac{\pi\lambda}{2}(x' - x) - \operatorname{sgn}(x' - x) \right\} f(x') dx' \quad (1.1)$$

boleh diturunkan kepada persamaan KdV dan persamaan Benjamin-Ono.

Dalam (1.1) P menandakan nilai prinsipal bagi kamiran yang berkenaan,  $\lambda^{-1}$  merujuk kepada jarak antara dasar bendalir dan permukaan gelombang berkenaan.

Dalam kes KdV, iaitu untuk gelombang panjang dipermukaan air cetek, maka diperlukan  $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ , iaitu  $\lambda \rightarrow \infty$ . Dengan mengambil

$\lambda \rightarrow \infty$  dan menggunakan

$$X = \lambda^{1/2} x, \quad T = \lambda^{1/2} t \quad (1.3)$$

maka persamaan BKT (1.0) menjadi

$$U_T + 2UU_X + \frac{1}{3} U_{XXX} = 0 \quad (1.4)$$

iaitu persamaan KdV yang menjadi asas kepada perkembangan teori soliton.

Untuk air dalam pula,  $\lambda \rightarrow 0$ , (1.0) memberikan persamaan Benjamin-Ono

$$U_t + 2UU_x + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x', t)}{x' - x} dx' = 0. \quad (1.5)$$

Dalam Mukheta[2] telah diperlihatkan bahawa penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT (1.0) boleh ditulis sebagai

$$U = i \frac{\partial}{\partial x} \left( \log \frac{G}{F} \right), \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.6)$$

dengan F dan G masing-masing adalah penentu berbentuk Wronskian yang boleh ditulis sebagai

$$F = (\hat{N}-1) \quad (1.7)$$

$$G = \sum_{r=0}^N \left( \frac{i\lambda}{2} \right)^r (r-1, r+1, r+2, \dots, N) \quad (1.8)$$

yang ditakrifkan oleh fungsi  $\phi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  dengan

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n &= A_n \exp \left( -\theta_n \right) + B_n \exp \left( \theta_n^* \right) \\
 \theta_n &= K_n \left( x + \frac{i}{\lambda} + i K_n t - \delta_n \right) \\
 K_n &= \frac{1}{2} \left( \lambda \gamma_n + i a_n \right) \\
 a_n &= \lambda \left( 1 - \gamma_n \operatorname{Kot} \gamma_n \right) \\
 A_n &= \left[ \left( K_n + K_n^* \right) \prod_{p \neq n} \left( K_p - K_n \right) \right]^{-1} \\
 B_n &= \left[ \prod_{p=1}^N \left( K_p + K_n \right) \right]^{-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

dengan  $\delta_n$  dan  $\gamma_n$  pemalar dan  $0 < \gamma_n < \pi$ .

Dalam (1.7) dan (1.8) tandaan  $\wedge$  menunjukkan terbitan bagi  $\phi_n$  terhadap  $x$  bermula daripada peringkat 0 hinggalah kepada peringkat yang ditunjukkan oleh nombor dibawahnya. Nombor-nombor lain yang berada dalam tandaan kurungan Wronskian itu menandakan peringkat bagi terbitan  $\phi_n$  terhadap  $x$  yang seterusnya.

Perbincangan seterusnya akan memperlihatkan bagaimana penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT [ruj. per. (1.6)-(1.9)] boleh diturunkan kepada penyelesaian N-Soliton bagi persamaan KdV dan persamaan Benjamin-Ono dalam bentuk Wronskian.

## 2. Persamaan KdV

Penyelesaian N-Soliton dalam bentuk Wronskian bagi persamaan KdV

telah diperoleh oleh Freeman[3]. Analisis yang dikemukakan disini adalah untuk tujuan perbandingan dengan keputusan yang ada dalam Freeman[3].

Jika diperlihatkan persamaan KdV (1.4), ianya telah diterbitkan daripada persamaan BKT (1.0) dengan menggunakan penjelmaan (1.3). Ini bermakna kita perlu menetapkan nilai  $\lambda^{1/2}\gamma_n$  dan  $\lambda^{1/2}\delta_n$  pada peringkat satu ketika melakukan proses  $\lambda \rightarrow \infty$  dan  $\gamma_n \ll 1$ .

Dengan mengambil had  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_n \ll 1$  dan menetapkan  $\lambda^{1/2}\gamma_n$  dan  $\lambda^{1/2}\delta_n$  kita memperoleh

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\lambda \gamma_n^2}{3} = \left[ \frac{\lambda^{1/2} \gamma_n}{3} \right]^2 \\ K_n &= \frac{\lambda \gamma_n}{2} \left( 1 + \frac{i \gamma_n}{3} \right) \\ A_n &= 2^{N-1} \lambda^{-N/2} P_n^{-1} \left\{ \prod_{1 \leq n}^N (P_1 - P_n) \right\}^{-1} \\ B_n &= 2^{N-1} \lambda^{-N/2} P_n^{-1} \left\{ \prod_{1 \leq n}^N (P_1 + P_n) \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_n &= 2^{N-1} \lambda^{-N/2} P_n^{-1} e^{-i \lambda^{1/2} P_n^2 T/4} \left\{ C_n \exp \left( - \frac{\xi_n'}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_n \exp \left( \frac{\xi_n'}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan

$$\left. \begin{aligned}
 C_n &= \left\{ \prod_{1 \neq n}^N (P_1 - P_n) \right\}^{-1} \\
 D_n &= \left\{ \prod_{1 \neq n}^N (P_1 + P_n) \right\}^{-1} \\
 \xi'_n &= P_n \left( X - \frac{P_n^2}{3} T - d'_n \right) \\
 P_n &= \lambda^{1/2} \gamma_n \\
 d'_n &= \lambda^{1/2} \delta_n
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Bagaimanapun memandangkan bahawa penyelesaian akhir N-Soliton boleh ditulis dalam bentuk (1.6) maka faktor yang ada pada ungkapan  $\phi_n$  [ruj. (2.2)] boleh dibuang dan seterusnya kita tulis

$$\phi_n = \text{kosh} \left( \frac{\xi_n}{2} \right) \quad (2.4)$$

dengan

$$\xi_n = P_n \left( X - \frac{P_n^2}{3} T - d_n \right) \quad (2.5)$$

$$d_n = \frac{1}{2} \left[ 2d'_n - \log C_n + \log D_n \right]. \quad (2.6)$$

Sekarang, daripada (1.7) dan (1.8), kita memperoleh

$$\frac{G}{F} = \left(\frac{i\lambda}{2}\right)^N \left[ 1 + \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N}-2, N)}{(\hat{N}-1)} + O(\lambda^{-2}) \right] \quad (2.7)$$

Maka seterusnya,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{G}{F}\right) &= \log \left\{ 1 + \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N}-2, N)}{(\hat{N}-1)} + O(\lambda^{-2}) \right\} \\ &= \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N}-2, N)}{(\hat{N}-1)} + O(\lambda^{-2}) \end{aligned}$$

iaitu setelah meninggalkan faktor  $\left(\frac{i\lambda}{2}\right)^N$  dalam (2.7) dengan alasan ianya tidak mempengaruhi penyelesaian akhir (1.6). Dengan itu (1.6) menjadi

$$\begin{aligned} U &= i \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2}{i\lambda}\right) \frac{(\hat{N}-2, N)}{(\hat{N}-1)} \\ &= \frac{2}{\lambda} \frac{\partial}{\partial X} \frac{(\hat{N}-2, N)}{(\hat{N}-1)} \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \log(\hat{N}-1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dengan ingatan bahawa

$$\frac{\partial}{\partial X}(\hat{N}-1) = (\hat{N}-2, N) \text{ dan } X = \lambda^{1/2} x.$$

Keputusan yang diperolehi diatas, iaitu (2.8), (2.4) adalah sama dengan keputusan yang telah diperolehi oleh Freeman[3] bagi persamaan KdV (1.4).

### 3. Persamaan Benjamin-Ono

Persamaan Benjamin-Ono (1.5) boleh didapati daripada persamaan BKT dalam had  $\lambda \rightarrow 0$  dan

$$\gamma_n = \pi \left( 1 - \frac{\lambda}{V_n} \right), \quad (3.1)$$

(lihat Matsuno[1]). Dalam (3.1),  $V_n$  adalah suatu parameter yang menentukan soliton ke- $n$  bagi persamaan Benjamin-Ono.

Dengan menggunakan  $\lambda \rightarrow 0$  beserta dengan  $\gamma_n$  yang diberikan oleh (3.1), kuantiti-kuantiti dalam (1.9) boleh dikira untuk menghasilkan

$$a_n = \lambda \left( 1 - \frac{\pi^2 \lambda^2}{3V_n^2} \right) + O(\lambda^2)$$

$$K_n = \frac{\lambda \pi}{2} - \frac{\lambda^2 \pi}{2V_n} + i \left( \frac{V_n}{2} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{6V_n} \right) + O(\lambda^3)$$

$$A_n = \left[ \pi \lambda \prod_{p \neq n}^N \frac{1}{2} (V_p - V_n) \right]^{-1}$$

$$B_n = \left[ \pi \lambda \prod_{p \neq n}^N \frac{1}{2} (V_p - V_n) \right]^{-1} \left[ 1 + i 2 \pi \lambda \alpha_n \right]$$

$$\text{dengan } \alpha_n = \sum_{p \neq n}^N \frac{1}{V_p - V_n},$$

$$\phi_n = i \left\{ -e^{\frac{\pi\lambda}{2} \left( \frac{i}{V_n} - \xi_n \right)} + (1 + i2\pi\lambda\alpha_n) e^{-i\lambda \left( \frac{i}{V_n} - \xi_n \right)} \right\} e^{-\frac{iV_n}{2}\eta_n} \quad (3.2)$$

$$\text{dengan } \xi_n = x - V_n t - \delta_n, \quad \eta_n = x - \frac{V_n t}{2} - \delta_n. \quad (3.3)$$

Daripada (1.8) pula, mudah untuk kita melihat bila  $\lambda \rightarrow 0$ , bahawa

$$G = (1, 2, \dots, N) = (\tilde{N}). \quad (3.4)$$

Dalam (3.4) tandaan  $\sim$  bermaksud bahawa penentu berkenaan terdiri daripada lajur-lajur yang bermula dengan terbitan  $\phi_n$  peringkat 1 pada lajur pertama, peringkat 2 pada lajur kedua sehinggalah peringkat yang ditunjukkan oleh nombor dibawahnya untuk lajur yang berkenaan.

Jika dirumuskan perbincangan diatas, penyelesaian N-Soliton bagi persamaan Benjamin-Ono boleh ditulis sebagai

$$U = i \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(\tilde{N})}{(N-1)} \right\} \quad (3.5)$$

dengan penentu bentuk Wronskian ditakrifkan oleh fungsi  $\phi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  yang diberikan oleh (3.2).

#### 4. Kesimpulan

Dalam perbincangan diatas kita telah melihat bagaimana penyelesaian N-Soliton bagi persamaan BKT diturunkan kepada



penyelesaian N-Soliton bagi persamaan KdV dan juga persamaan Benjamin-Ono dalam bentuk penentu Wronskian. Keputusan yang diperolehi ini dengan sendirinya menjawab persoalan yang telah dikemukakan oleh Matsuno[4] yang menyatakan bahawa penyelesaian N-Soliton bagi persamaan Benjamin-Ono tidak boleh ditulis dalam bentuk Wronskian.

#### Rujukan

- [1] Y. Matsuno, The Bilinear Transformation Method, Academic Press, Tokyo, 1984.
- [2] Mukheta bin Isa, Penyelesaian persamaan BKT dalam bentuk Wronskian: dlm prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik Ke-IV (1990), 113-121.
- [3] N.C. Freeman, Soliton solutions of nonlinear evolution equations, IMA J.Appl.Math. 32 (1984), 125-145.
- [4] Y. Matsuno, A direct proof of the N-Soliton solution of the Benjamin-Ono equation by means of Jacobi's formula, J.Phys.Soc.Japan 57 (1988), 1924-1929.